

زمان امتحان ۱۲۰ دقیقه

۱. دنباله اعداد  $a_n$  را به صورت

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

را در نظر بگیرید. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر  $n \in \mathbb{N}$  رابطه  $a_n \leq 3^n$  برقرار است. (۲ نمره)

۲. عدد  $n = 2^8 3^5 5^2 7^3 11$  را در نظر بگیرید. (۲ نمره)

الف) چه تعدادی از مقسوم علیه‌های این عدد مضرب  $3^6$  هستند؟

ب) چه تعدادی از مقسوم علیه‌های این عدد هم مجذور کامل و هم مکعب کامل هستند؟

۳. یک معلم دارای  $n$  دانش آموز است. او می‌خواهد  $1^*$  سکه یک گرمی را بین این  $n$  کودک توزیع کند. ( $1^*$  نمره)

الف) به چند طریق می‌توان این سکه‌ها را بین کودکان تقسیم کرد به طوری که هر کودک حداقل یک سکه دریافت کند؟

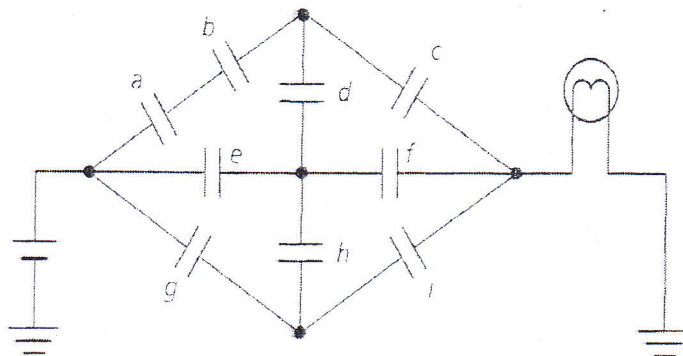
ب) به چند طریق می‌توان این سکه‌ها را بین کودکان تقسیم کرد به طوری که بزرگترین کودک حداقل دو سکه داشته باشد؟

۴. می‌خواهیم از بین  $1^*$  مرد و  $1^*$  زن یک گروه  $12$  نفری تشکیل دهیم. ( $1^*$  نمره)

الف) اگر بخواهیم تعداد زنان زوج باشد، به چند طریق می‌توان این انتخاب را انجام داد؟

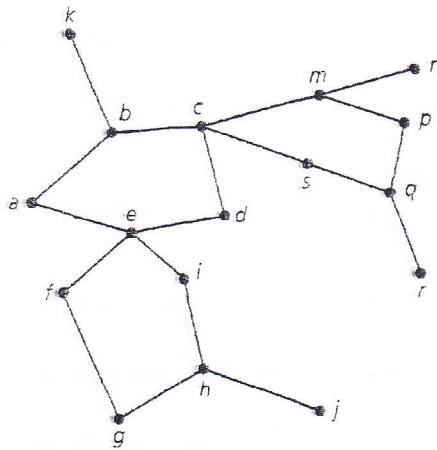
ب) اگر بخواهیم حداقل ۸ مرد داشته باشیم، به چند طریق می‌توان این انتخاب را انجام داد؟

د. شبکه دوگان شبکه الکتریکی زیر را بیابید. (۲ نمره)



۶. عبارت جبری  $((a+b)^2(x-y))/(a^2+b^2)$  را به صورت درخت دودویی ریشه‌دار رسم کنید. (نمره ۱/۵)

۷. درخت فراگیر گراف زیر را با الگوریتم اول عمق به دست آورید. (نمره ۱/۵)



موفق باشید