

موسسه آموزش عالی نبی اکرم (ص)
 محاسبات عددی پیشرفته
 کارشناسی ارشد - مهندسی مکانیک



۱۳۹۶/۴/۱

وقت: ۱۰۰ دقیقه

مدرس: احمدیان

۱. معادله $f(x) = \cos(x)(1 - \sin(x)) = 0$ را در نظر بگیرید:
 الف) نشان دهید $x = \frac{\pi}{4}$ ریشه ی معادله و مرتبه تکرار آن ۳ است.
 ب) این ریشه را با روش نیوتن رافسون تصحیح شده با دقت $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-4}$ بدست آورید.

(۲.۵ نمره)

۲. فرض کنید $k > 1$ یک عدد صحیح و a عدد حقیقی مثبت باشد و دنباله ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تعریف شده با

$$x_{n+1} = \frac{x_n^k + kax_n}{kx_n^{k-1} + a}, \quad n = 0, 1, \dots$$

همگرا باشد اولاً حد دنباله را بیابید و مرتبه همگرایی را مشخص کنید. ثانياً k را طوری تعیین کنید که مرتبه ی همگرایی حداقل دو شود.

(۲.۵ نمره)

۳. مقادیر تابع f به صورت جدول زیر در دست است:

x	۱/۲	۱/۳	۱/۴	۱/۵	۱/۶
$f(x)$	۰/۱۸۲۳	۰/۲۶۳۵	۰/۳۳۶۵	۰/۴۰۵۵	۰/۴۷۰۰

- الف) حساب کنید تقریبی برای $f'(1/4)$ با استفاده از فرمولی که خطای آن $O(h^4)$ باشد.
 ب) حساب کنید تقریبی برای $f'(1/4)$ با استفاده از برونمایی ریچاردسون بطوری که دقت آن $O(h^4)$ باشد.
 ۴. تابع $f(x) = \sin(x)^{\frac{1}{4}}$ بر بازه ی $[0, \frac{\pi}{4}]$ مفروض است. نشان دهید $|f^{(4)}(x)| < 60$. کوچکترین مقدار n را تعیین کنید به طوری که در محاسبه ی $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ با روش سیمپسون خطا از 10^{-4} بیشتر نباشد.

(۲.۵ نمره)

۵. مقدار تقریبی انتگرال

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx$$

را:

- الف) با روش رامبرگ بدست آورید (بازه $[0, 2\pi]$ را دو بار نصف کنید).
 ب) با فرمول سه نقطه ای گاوس لژاندر به دست آورید.

(۲.۵ نمره)

۶. مساله ی مقدار اولیه زیر با روش رانگ کوتای مرتبه دو حل کنید. ($y(0/2)$ را با $h = 0/1$ تقریب بزنید).

$$y' = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \quad y(0) = 1.$$

(۲.۵ نمره)

موفق باشید